

CAPÍTULO 5: Introducción de las nuevas tecnologías en la enseñanza del Análisis Matemático.

INTRODUCCIÓN.

Tanto las calculadoras gráficas como los ordenadores se están utilizando últimamente como herramientas para la enseñanza del Análisis Matemático, por sus capacidades gráficas para representar las curvas que se asocian a las funciones, y poder visualizar directamente sobre ellas muchos conceptos, así como las características y propiedades que poseen. Estas herramientas, permiten representaciones en algunos de los sistemas de representación que hemos utilizado hasta ahora, así como traducciones entre estos sistemas de representación. La única limitación que poseen, es que la representación se limita a funciones y situaciones concretas, es decir, no se puede razonar sobre situaciones de tipo general y estrictamente abstractas, pero las posibilidades que ofrecen estos nuevos medios, permiten visualizar rápidamente diferentes situaciones para buscar ejemplos y contraejemplos, así como las diferentes posibilidades de un concepto o propiedad.

5.1.- DESCRIPCIÓN DEL SOFTWARE.

Entre el software más utilizado en relación con este tema hemos de destacar el sistema DERIVE, los programas CALCULA, FUNCIONES o GRÁFICAS publicados por el MEC por sus posibilidades de uso del zoom y de la medición de figuras gracias a su sistema de gradaciones, el programa CABRI II de Geometría dinámica que aplicado al Análisis nos permite identificar las curvas por sus propiedades geométricas. Describamos brevemente las características que poseen cada uno de estos programas.

5.1.1.- DERIVE

Es un *sistema de cálculo simbólico*¹ que permite abarcar temas como la realización de cálculos aritméticos complejos, manipulación de variables, fórmulas y expresiones algebraicas, operaciones con polinomios y funciones racionales de una o varias variables, el álgebra, resolución de ecuaciones, cálculos con matrices, el Análisis incluyendo la derivación, los desarrollos en serie, la integración formal y el cálculo de límites y posee capacidades gráficas para realizar representaciones tanto en dos como en tres dimensiones. Reconoce una amplia clase de funciones matemáticas además de las algebraicas, como las funciones trigonométricas y sus inversas, la exponencial y la logarítmica, las funciones hiperbólicas y sus inversas, funciones especiales como las funciones eulerianas, las de Bessel,... Su primera versión apareció en 1988 y se distribuía por Soft Warehouse Inc. Actualmente hay una versión para Windows que dispone de un sistema de menús que lo hace muy fácil de usar. Posee dos pantallas distintas con menús diferentes en cada una de ellas: una se utiliza para la edición de expresiones de tipo aritmético-algebraico y la otra para la representación gráfica de funciones. En esta segunda ventana, se pueden utilizar comandos relativos al tamaño de la ventana en la que está representada la función, posee opciones para realizar zoom alrededor de un punto o en una determinada zona de la gráfica, cambiar la escala, el color de la gráfica, ... Este sistema no impone ninguna restricción sobre el nombre de las variables, de forma que se puede representar una función de la forma $y=a^2+2$, considerándose en este caso la a como variable independiente y aparecerá por lo tanto la gráfica de una parábola. Asimismo se pueden representar familias de funciones para observar el efecto de un parámetro en la gráfica de la función, como en el siguiente caso en el que se ha representado la familia ax^3-2x^2-7x+1 , donde a varía entre 2 y 6:

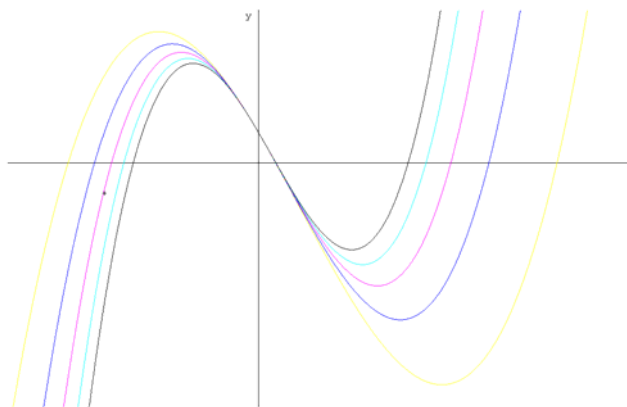


Fig. 5.1. Familia de funciones $y=ax^3-2x^2-7x+1$

¹ El cálculo simbólico es la tecnología especializada en la manipulación automática de fórmulas, vectores, matrices,... con elementos numéricos y/o simbólicos. Los primeros sistemas de cálculo simbólico (SCS) fueron escritos para resolver problemas específicos en determinados campos de la matemática aplicada, eran difíciles de usar y sus requerimientos técnicos limitaban su uso a un reducido grupo de investigadores.

5.1.2.- FUNCIONES (PNTIC-CIDE),

Este programa está dedicado a la representación de funciones explícitas. Permite el estudio e interpretación gráfica de las mismas y ofrece la posibilidad de obtener el dominio, la imagen, los extremos, intervalos de crecimiento, intervalos de convexidad etc. También permite representar directamente sin necesidad de calcularla la derivada de una función así como una función integral. En la imagen siguiente se puede observar la gráfica de la función $y=x^3$ y la gráfica de su función derivada

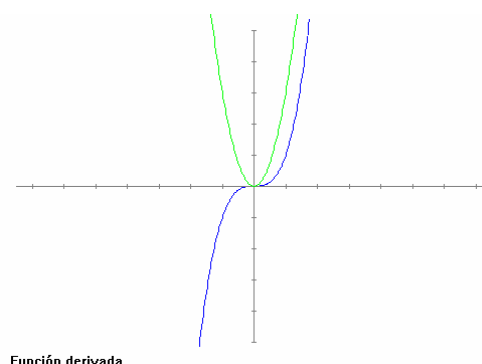


Fig. 5.2: Gráfica de $y=x^3$ y de su derivada

También se pueden obtener, gráfica y numéricamente, los puntos de intersección de dos funciones y se puede representar y calcular el área comprendida entre las dos. Existe una versión para windows que permite representar gráficamente hasta 6 funciones

5.1.3.- GRÁFICAS (PNTIC-CIDE),

Es una herramienta creada por Manuel Avilés Sánchez y José Alfredo Martínez Sanz en el año 1991, que permite el estudio de funciones y que está caracterizada por su gran potencia y sencillez de manejo. Está diseñada para la representación gráfica de funciones de una sola variable bajo sus formas explícita, paramétrica, polar e implícita. Puede efectuar la representación gráfica de hasta nueve curvas de todos los tipos en ventanas que oscilan entre 10^{-37} y 10^{37} facilitando de esta forma, tanto el análisis de los aspectos más sobresalientes del estudio local y global de funciones, como la influencia de los distintos parámetros en el comportamiento de sus gráficas.

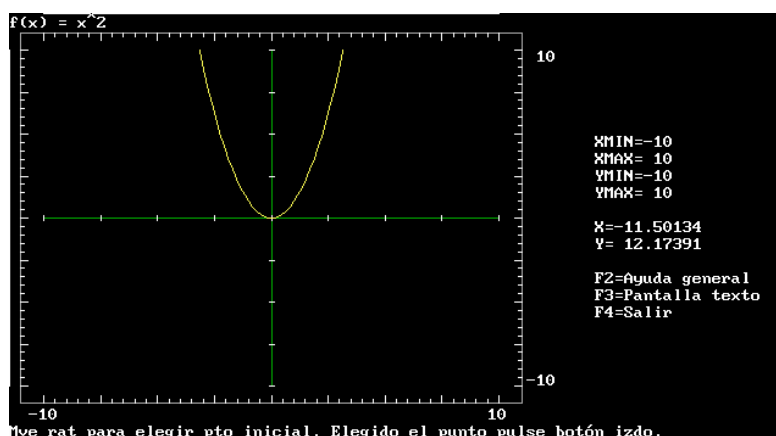


Fig 5.3: GRÁFICAS.

5.1.4.- CALCULA (PNTIC-CIDE)

Software desarrollado por M. Oliveró y José Luis Abreu, que permite representar gráficamente una función, construir su tabla de valores, observar los puntos por los que pasa la función, calcular su dominio, representar familias de funciones, resolución gráfica de ecuaciones, inecuaciones de una incógnita y sistemas de ecuaciones e inecuaciones de dos incógnitas, estudiar la periodicidad de las funciones, realizar programación lineal, estudiar los intervalos de crecimiento y de convexidad, así como localizar los extremos relativos, representar gráficamente las asíntotas oblicuas, representar funciones definidas a trozos y calcular primitivas, integrales definidas y áreas. En la pantalla se exhiben constantemente casi todas las opciones, representadas por distintos iconos distribuidos alrededor de la ventana, en la que se representan gráficamente las funciones. En el recuadro inferior de la pantalla se representan algebraicamente las funciones. Se puede obtener, por ejemplo, la derivada numérica mediante los pasos siguientes:

- Dibujar la gráfica de la función f .
- Por un punto cualquiera $x=a$ dibujar la recta tangente a la gráfica de la función f , con un triángulo de base 1 y de altura igual a la pendiente de la recta tangente $f'(a)$.
- Mover un punto anterior sobre la gráfica de la función f , utilizando el teclado (o el ratón) del ordenador para obtener diferentes valores de $f'(a)$.

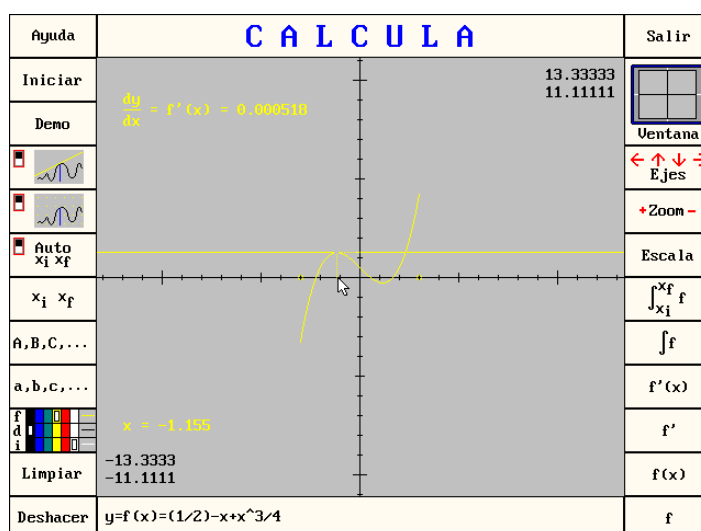


Fig. 5.4. CALCULA

5.1.5.- CABRI

Cabri-géomètre (de Cahier Brouillon Interactif pour l'apprentissage de la géométrie) diseñado por Jean Marie Laborde y Franck Belleman, es un programa desarrollado en el Laboratorio de estructuras discretas y de Didáctica del IMAG (Institut d'Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble) de la Universidad Fourier de Grenoble. Se trata de un programa diseñado para la enseñanza de la geometría plana que destaca por sus capacidades de construcción y medida, y por su facilidad de uso. CABRI tiene la posibilidad de desplazar los datos iniciales de sus construcciones, readaptando automáticamente a los nuevos datos la figura construida. Esta capacidad de movimiento en tiempo real confiere al programa gran dinamismo e interactividad para la enseñanza de la geometría. Veremos a continuación cómo se puede llevar a cabo una construcción geométrica de las curvas que se utilizan en relación con los puntos críticos. En particular, en la figura que se ofrece a continuación aparece la construcción de la función que calcula, a partir de un segmento de longitud dada, el punto de dicho segmento que lo divide en dos partes, de forma que la suma del área del triángulo equilátero cuyos lados son iguales a una de esas partes, con el área del cuadrado cuyo lado es igual a la otra parte del segmento, sea mínima.

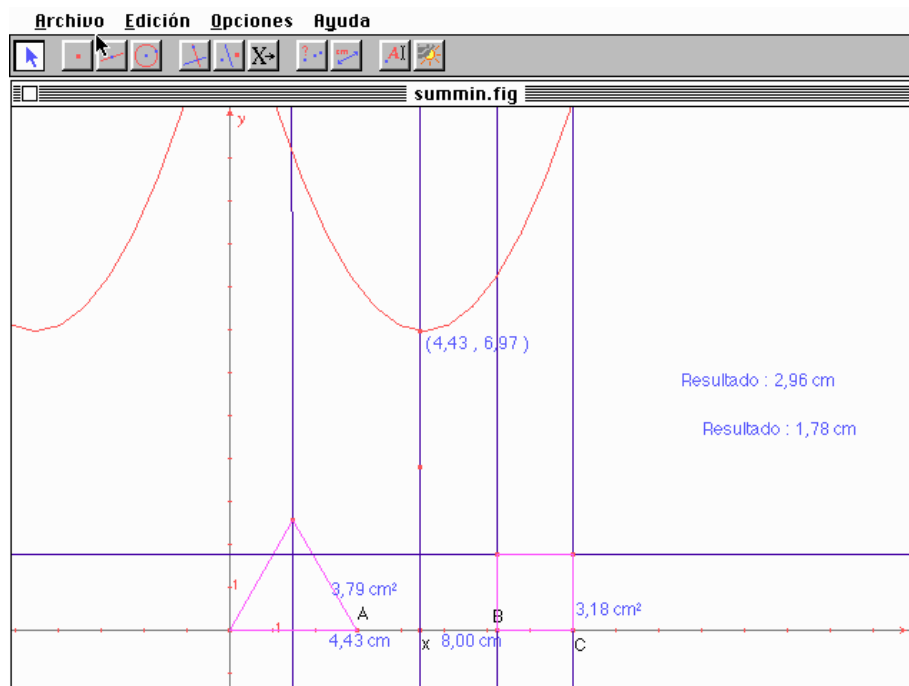


Fig. 5.5: CABRI

El uso de este tipo de recursos supone una comprensión del concepto de función, contribuye a la relación función-gráfica y permite aprovechar sus capacidades gráficas para que sea el propio software el que lleve a cabo las actividades más rutinarias y los alumnos puedan pensar, comprender y generalizar. Las gráficas de funciones en estos entornos, son consideradas en algunos casos como la traza de un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones y en otros como un lugar geométrico. Podríamos aplicar la forma de concebir las curvas por parte de los matemáticos clásicos para reconstruirlas, usando este gran potencial. Como veremos a continuación, la presentación de los conceptos del Análisis utilizando estos medios aporta una forma de trabajo interactiva en el sentido de que, a partir de una misma función descrita por medio de algún fenómeno, se puede estar considerando su representación algebraica, su representación tabular, su representación gráfica, indistintamente, así como manteniendo dos de estas representaciones al mismo tiempo.

5.1.6.- Calculadoras gráficas.

Las calculadoras gráficas (CG) permiten abordar una amplia gama de conceptos y aplicaciones más allá de los típicos cálculos aritméticos, de esta forma, extiende a nuevas áreas la posibilidad de utilizar una metodología activa, basada en la experimentación y el descubrimiento, incidiendo más en los procesos y en la interpretación de los resultados, en lugar de poner el acento en los cálculos. Sus prestaciones se van acercando a los SCS y frente a éstos tienen la ventaja de su portabilidad, su manejabilidad y la disponibilidad para los alumnos. Algunas de las posibilidades de uso de la CG pueden ser:

- Realización de cálculos aritméticos y utilización de funciones científicas.
- Capacidad de edición similares a las de un procesador de texto.
- Asignación de valores a constantes y posibilidad de operar con ellos.
- Resolución de ecuaciones de una variable.
- Definición de funciones de una variables real.
- Representación gráfica en dos dimensiones de funciones de dos variables.
- Capacidad de establecer, en la pantalla gráfica el rango que se desee, bien directamente o utilizando las posibilidades del zoom.
- Capacidad para localizar puntos en la pantalla gráfica con el cursor o sólo a lo largo de las figuras representadas.
- Estudio global y local de las funciones representadas.
- Cálculos estadísticos con una y dos variables.
- Capacidad para editar y ejecutar programas.

Existen diferentes marcas y modelos en el mercado: CASIO, HEWLETT PACKARD, TEXAS INSTRUMENTS,.. Aunque hemos elegido una TI-92 por su fácil manejo, se pueden adaptar todas las consideraciones realizadas en este estudio a cualquiera de los otros marcas y modelos. Las ventajas que tiene esta calculadora sobre las demás radica en su teclado QWERTY que facilita la edición de textos, la incorporación del SCS DERIVE, así como la del programa de geometría CABRI, lo que permite utilizar ambos sistemas simultáneamente, facilitando la realización de numerosas actividades.

En esta calculadora gráfica, podremos comprobar que para su uso es necesario el manejo de diferentes pantallas correspondientes a diferentes representaciones simbólicas. De esta forma, tendremos una pantalla correspondiente a la **representación de tipo aritmético**:

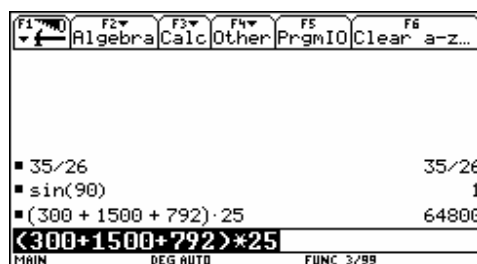


Fig. 5.6: Pantalla HOME de la CG

Las expresiones aritméticas se introducen en el rectángulo inferior que está señalado, y una vez que se pulsa la tecla $\div$ la calculadora coloca la expresión al lado izquierdo de la pantalla y el resultado de la operación al lado derecho, como se puede observar en la pantalla anterior.

Para introducir las funciones en la calculadora generalmente recurriremos a una pantalla que permite utilizar expresiones de tipo **algebraico**, se trata de una pantalla de edición de funciones. Esta pantalla no sólo sirve para las clásicas funciones expresadas en

coordenadas cartesianas, sino que tenemos la posibilidad de trabajar en coordenadas paramétricas y polares. Para las primeras la pantalla es de la forma:

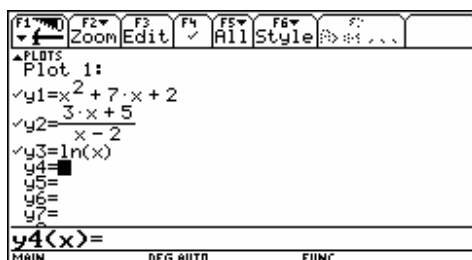


Fig 5.7: Pantalla de edición de funciones

Las expresiones que se quieren introducir en la calculadora se escriben en el rectángulo inferior, y una vez que se quieren activar se pulsa la tecla $\div$ de forma que pasan a la parte superior de la pantalla asociadas a alguna y_i .

Para **representarlas gráficamente** tendremos una pantalla en la que disponemos de unos ejes cartesianos. Podemos representar una única función o varias, como ocurre en la situación siguiente, en la que se han representado todas las funciones escritas en la pantalla de edición de funciones:

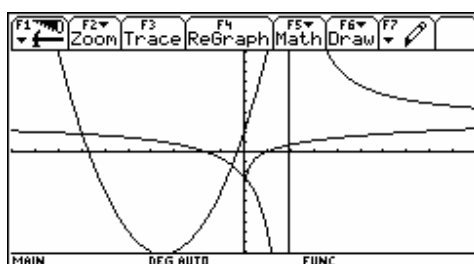


Fig. 5.8: Pantalla gráfica de la CG

Para activar esta pantalla hay que pulsar sucesivamente las teclas $\infty\%$. Los ejes que tenemos en la pantalla aparecen divididos en unidades para permitir la lectura e interpretación de la gráfica en cuestión.

Finalmente, si queremos utilizar la **representación tabular**, dispondremos de la correspondiente pantalla para ello. Los datos se disponen en columnas verticales, así los valores de la variable independiente se pueden leer en la primera columna y los correspondientes valores de la dependiente en las siguientes, de forma que la segunda columna corresponde a la primera función y_1 , en la tercera columna la segunda función, y así sucesivamente. Para activar esta pantalla hay que pulsar sucesivamente las teclas $\infty\%$ y nos aparecerá una pantalla como la siguiente, que corresponde a las funciones representadas gráficamente antes:

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Setup	Cell	Mode	Del	Pow	Im	Pow	
x	u1	u2	u3				
-1.	-4.	-.6667	undef				
0.	2.	-2.5	-∞				
1.	10.	-8.	0.				
2.	20.	undef	.69315				
3.	32.	14.	1.0986				
4.	46.	8.5	1.3863				
5.	62.	6.6667	1.6094				
6.	80.	5.75	1.7918				
x=-1.							
MAIN DEG AUTO FUNC							

Fig. 5.8: Pantalla tabular de la CG

Se trata de una pantalla en la que los datos son numéricos, por lo que no son difíciles de interpretar salvo en algunas ocasiones, como en la pantalla anterior en la que aparece undef. que indica que la función no está definida para el correspondiente valor de la variable independiente, o $-\infty$ que puede resultar un tanto extraño para los alumnos.

Incluso se pueden utilizar simultáneamente dos pantallas de las mencionadas anteriormente, así en el ejemplo siguiente aparecen una pantalla correspondiente a la tabla de una función y al mismo tiempo su representación gráfica. Podemos escoger cualquier par de pantallas de las descritas anteriormente para visualizar.

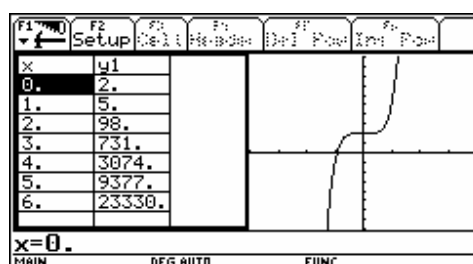


Fig: 5.9: Doble pantalla de la CG

A partir de la resolución de un problema iremos describiendo los sistemas de representación que se van utilizando, y sus diferencias con los habituales utilizando lápiz y papel.

5.2.- APROXIMACIÓN INTUITIVA A LOS PUNTOS CRÍTICOS.

Esa aproximación² se puede hacer: a través de los valores que toma la función en un entorno el punto, es decir mediante la utilización de la tabla de valores³, a través de la

² Esto estará ligado a la definición de punto extremo como punto en el que el valor de la función es mayor o menor que todos los que están en un entorno suyo.

³ Insertar actividades por medio de las cuales se pueda analizar cada una de estas posibilidades.

lectura de la gráfica de la función, mediante la visualización de la traza de la curva por medio del cursor o representando la función por medio de sus propiedades geométricas (CABRI), analizando el punto en el que se comprueba que es crítico.

Partiremos de un problema inicial que utilizaremos para mostrar los sucesivos sistemas de representación necesarios para su resolución, utilizando las nuevas tecnologías especificadas para cada uno de los métodos anteriormente enunciados:

Se dispone de 100 m de cerca para cerrar un campo rectangular, uno de cuyos lados será un río. Hallar cómo debe hacerse si se quiere que la superficie determinada sea máxima⁴.

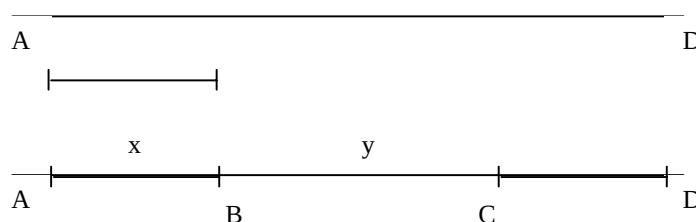
5.2.1.- Representación geométrica de una función.

Aunque CABRI es un programa informático especialmente pensado para cuestiones de tipo geométrico, podemos utilizarlo para “construir” las funciones a partir del enunciado de un problema como el anterior. De esta forma se puede visualizar cuáles son las propiedades geométricas de los puntos que pertenecen a la curva que estamos considerando. Esta forma de considerar las curvas, recuerda mucho a las primeras concepciones que tenían los matemáticos acerca de ellas, recordemos las descripciones que hacía l'Hôpital de las curvas como conjunto de puntos que verifican unas determinadas condiciones, y que se pueden trasladar directamente a este programa para visualizar la curva que se está describiendo. Este tipo de resolución, sólo se puede utilizar en el caso de que las curvas sean de tipo algebraico, y particularmente en las curvas llamadas mecánicas por Euler. Para construirlas, se utilizan exclusivamente elementos geométricos como rectas, segmentos, circunferencias, cuadrados,... así como propiedades que pueden ser de perpendicularidad, paralelismo o intersección. Las curvas construidas de esta forma, se constituyen en lugares geométricos que verifican alguna condición, de forma que, una de las características más sobresalientes del programa como es su dinamismo, se pone de manifiesto permitiendo observar cómo, haciendo variar el punto inicial, el punto de llegada va recorriendo la curva en cuestión.

Si intentamos utilizar este programa en relación con el problema anteriormente descrito, tendremos que seguir los siguientes pasos para conseguir la función buscada:

Primeramente tendremos que construir el perímetro del rectángulo mediante un segmento AD de longitud igual al perímetro o que lo represente, por ejemplo que tenga en 10 cm en lugar de 100 cm como indica el enunciado. Tendremos que escoger otro segmento de longitud menor que la mitad de la anterior que represente a los dos lados iguales de la figura sobre la que se está trabajando. Se lleva este segundo segmento sobre el primero dos veces, una en cada uno de los extremos del segmento inicial y así se seleccionan dos puntos B y C de forma que la longitud BC sea variable, pero AB sea igual a CD (ya que la figura resultante ha de formar tres lados de un rectángulo y, por lo tanto, dos de ellos han de tener la misma longitud).

⁴ Azcárate, C. y otros (1996): *Cálculo diferencial e integral*. Madrid: Síntesis.



Como la fórmula del área de un rectángulo es igual al producto de sus lados $A=x \cdot y$ podemos establecer la siguiente relación:

$$\frac{A}{y} = \frac{x}{1}$$

De esta forma podemos construir A como la tercera proporcional a las longitudes de los lados x e y, para lo cual solamente necesitamos un sistema de paralelas. El lugar geométrico de los puntos cuya primera coordenada es x y la segunda A definirá la curva que estamos buscando que aparece en la siguiente pantalla de color rojo.

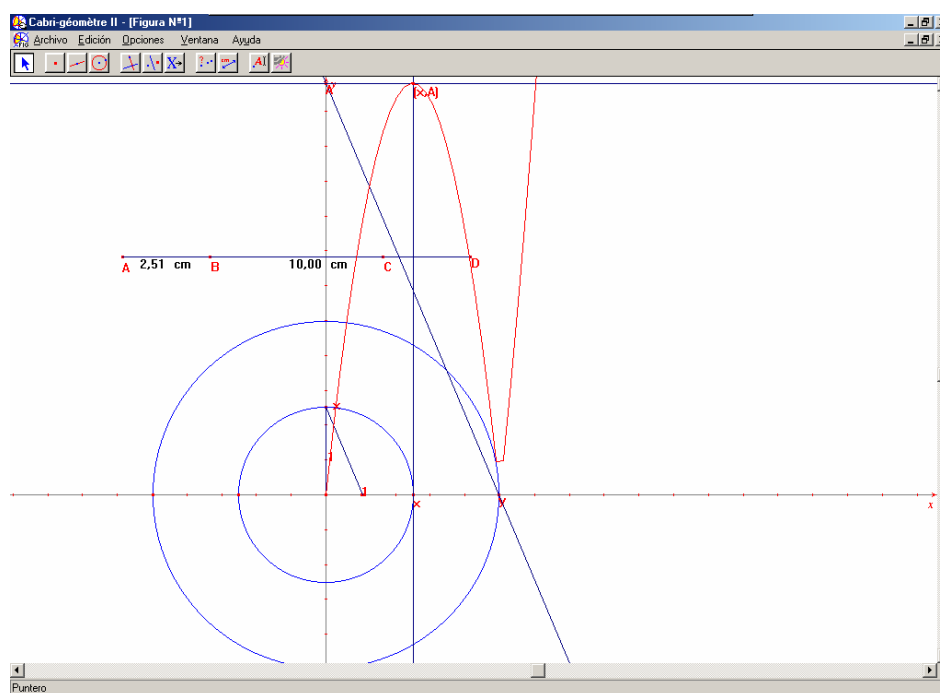


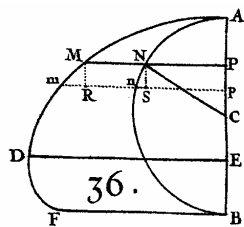
Fig. 5.10: Los puntos críticos usando CABRI

Si enumeramos todos los pasos que hemos seguido para construir la curva tenderemos:

1. Construir un segmento AD de longitud 10 cm que representa el perímetro del cercado.
2. Seleccionar un punto B en dicho segmento cuya distancia a A sea menor que la mitad de AD.
3. Calcular la distancia entre A y B.
4. Calcular el punto C cuya distancia a D sea la misma que entre A y B.
5. Transferir esa distancia al eje OY para construir el punto x.
6. Calcular la distancia entre B y C.
7. Transferir esta distancia al eje OX y marcar el punto y.
8. Construir el segmento 1x (1 es la unidad del eje OX)
9. Trazar una recta paralela al segmento anterior que pase por y
10. Marcar el punto de intersección de esa recta con el eje OY con la letra A ya que representará el área del cercado.
11. Calcular el punto de coordenadas (x,A) que será el punto que estamos buscando. Según el valor de x el área irá variando.
12. Podremos construir finalmente el lugar geométrico del punto (x,A) en función del punto B seleccionado en el segmento y que aparece en color rojo. Variando el punto B podemos recorrer dicho lugar geométrico y comprobar dónde se alcanza el punto máximo.

Como se ha dicho anteriormente, también podemos utilizar una herramienta de dicho programa que incide más aún en el carácter dinámico que posee la construcción realizada, es decir, podemos animar la figura, de forma que se puede visualizar cómo la variación en la longitud del segmento que hemos llamado x, influye en la posición del punto que da el área del rectángulo, y va recorriendo la curva de la que podemos observar entre otras cosas que es una parábola.

Para comprender la capacidad de visualización de este método, podemos intentar llevar esto mismo a cabo con una de las funciones utilizadas por l'Hôpital y comparar las dos gráficas resultantes:



Soit une demi-roulette accourcie AMF, dont la base BF est moindre que la demi-circonférence ANB du cercle générateur qui a pour centre lempoint C. Il faut déterminer le point E fus le diametre AB, en sorte que l'appliquée DE soit la plus grande qu'il est possible.

Ayant mené à discrétion l'appliquée PM qui coupr le demi-cercle en N, on concevra à l'ordinaire aux points M, N... l'on aura par la propriété de la roulette

$$ANB(a).BF(b) :: AN(u).NM = \frac{bu}{a} \text{ (l'Hôspital, p. 43).}$$

La descripción geométrica que nos da l'Hôpital, nos sirve para utilizar el programa CABRI, ya que viene definida por medio de una cuarta proporcional, igual que hemos hecho en el ejemplo anterior. Es decir, la clave reside en la igualdad $\frac{ANB}{BF} = \frac{AN}{NM}$

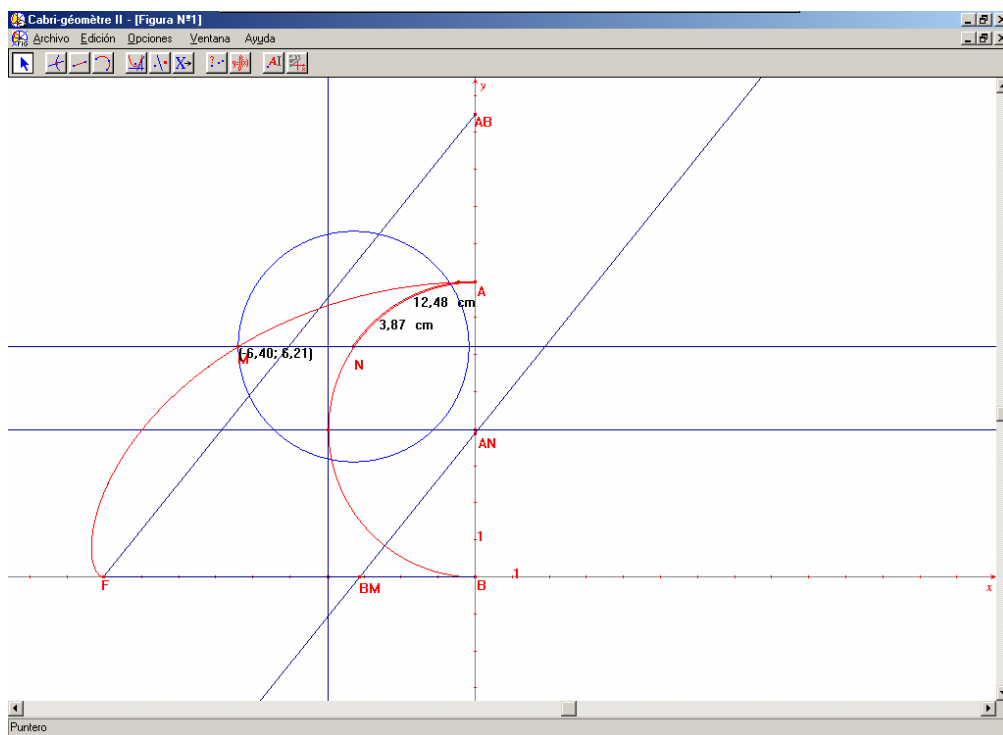


Fig. 5. 11 La semiruleta de l'Hôpital

La figura que hemos construido es asombrosamente igual a la de l'Hôpital, como podemos comprobar comparándolas y su construcción se ha llevado a cabo en los siguientes pasos:

1. Se marca el punto B en el origen de coordenadas.
2. Se marca otro punto A en el eje OY.
3. Se construye una semicircunferencia de diámetro AB. Para ello se selecciona el centro como punto medio de AB y se hace un arco.
4. Se calcula la medida de dicha circunferencia.
5. Se marca un punto F en el eje OX de forma que BF sea menor que la medida de la circunferencia.
6. Se transfiere la medida de la semicircunferencia al eje OY y se marca el punto AB
7. Se construye el segmento que une el punto F con el punto AB.
8. Se selecciona un punto N sobre el arco de semicircunferencia que va a ser la variable.
9. Se mide el arco de longitud AN y se transfiere esa medida al eje OY marcando el punto AN.
10. Se construye la recta paralela al segmento construido anteriormente que pasa por AN.
11. Se marca el punto de corte de dicha recta con el eje OX como BM.
12. Se calcula la medida de la distancia entre B y BM.
13. Se construye la recta perpendicular al eje OY que pasa por el punto N.
14. Se lleva la última medida efectuada a dicha recta perpendicular a partir de N para dibuja el punto M.
15. Se construye el lugar geométrico del punto M según varía N que está marcado por medio de una línea curva roja.

De forma similar se podría hacer con el resto de las gráficas utilizadas por los matemáticos clásicos. El programa ayuda a la traducción **desde la descripción** del problema o de la curva a usar, **hasta su representación gráfica**, sin necesidad de obtener previamente la representación algebraica, como es habitual en la enseñanza. No se necesitan ningún tipo de conocimiento del Análisis Matemático, sino más bien un gran conocimiento de carácter geométrico, que en la actualidad está bastante olvidado en la

enseñanza de las matemáticas. Se incide fundamentalmente en las propiedades geométricas de la curva y en la visualización que de ella podemos obtener.

5.2.2.- Lectura de la gráfica.

El resto de los métodos que se pueden usar para la resolución de los problemas de optimización, necesita previamente de la traducción de un enunciado a una expresión algebraica, lo cuál se lleva a cabo sin el uso de los nuevos medios tecnológicos. El primer paso para resolver el problema, consistirá en traducir el enunciado a una expresión algebraica que podamos introducir en la calculadora, o en algunos de los programas anteriormente citados. Como se trata de calcular la superficie máxima de un terreno rectangular, tendremos que recurrir a la fórmula del área de dicha figura en función de sus lados que serán las variables independientes (x , y) es decir, dispondremos de la función de dos variables:

$$f(x,y)=x \cdot y$$

Seguidamente, y teniendo en cuenta las condiciones del problema relativas al perímetro del terreno, podremos deducir la ecuación de ligaduras conveniente para transformar la función anterior en una función de una sola variable.

$$2x+y=100$$

Utilizando reglas puramente algebraicas, es decir, despejando una de las dos variables, por ejemplo, y sustituyendo en la función obtendremos la expresión algebraica buscada:

$$f(x)=x \cdot (100-2x)$$

Hasta el momento el proceso no dista nada en absoluto del utilizado sin recurrir a un medio tecnológico, ya que todo el razonamiento se basa en la manipulación algebraica de las variables elegidas. Las dos representaciones expuestas hasta el momento, la descripción del problema y la expresión algebraica son más propias de un soporte como pueda ser, por ejemplo, el papel. A partir de este momento es cuando se producen las diferencias, desde la introducción de la expresión algebraica por medio de un teclado. Aunque casi todos los programas han procurado adaptarse al lenguaje algebraico, la mayoría incluyen símbolos propios, algunos de los cuales son comúnmente aceptados por todos los programas como los relativos a algunas operaciones aritméticas: multiplicar (*), potenciación (^) o incluso los que se refieren a ciertos números que pasan a llamarse de distinta manera como el número π que pasa a denominarse PI o el número e, NE; pero otros son específicos de cada programa, y generalmente corresponden a los términos utilizados para nombrar algunas de las funciones más habituales. Por ejemplo, en el programa FUNCIONES tenemos la siguiente nomenclatura que dista de la estándar:

SEN() seno en radianes	SEG() seno en grados sexagesimales.
COS() coseno en radianes	COG() coseno en grados sexagesimales
TAN() tangente en radianes	TAG() tangente en grados sexagesimales
ASE() arcoseno “ “	ASG() arcoseno “ “
ACO() arcocoseno “ “	ACG() arcocoseno “ “
ATA() arcotangente “ “	ATG() arcotangente “ “
LN() logaritmo neperiano	LOG() logaritmo decimal
EXP() exponencial	ALO() arco de logaritmo
ABS() valor absoluto	

Tabla 5.1: Notación utilizada en el programa FUNCIONES para designar algunas de las funciones más habituales

En DERIVE la nomenclatura utilizada proviene de sus primeras versiones, que debido a su origen inglés, mantiene algunos símbolos o notaciones utilizados en este idioma, y que varían relativamente poco de los utilizados en el nuestro:

SIN, COS, TAN, COT	seno, coseno, tangente y cotangente
ASIN, ACOS, ATAN	arcoseno, arcocoseno, arcotangente.
SINH	seno hiperbólico
EXP	exponencial
LOG	logaritmo decimal
LN	logaritmo neperiano
SQRT	raíz cuadrada
ABS	valor absoluto

Tabla 5.2 : Notación utilizada en el programa DERIVE para denotar algunas de las funciones más habituales

En GRÁFICAS las funciones que están incorporadas son:

int(x)	parte entera de x
abs(x)	valor absoluto de x
sqr(x)	raíz cuadrada de x
exp(x)	e elevado a x
log(x)	logaritmo neperiano de x
sin(x)	seno de x (x radianes)
cos(x)	coseno de x (x radianes)
tan(x)	tangente de x (x radianes)
atn(x)	arco cuya tangente es x
rnd	genera un número al azar entre 0 y 1

Tabla 5.3 : Notación utilizada por el programa GRÁFICAS para denotar algunas de las funciones más habituales.

Con estas variaciones, algunas funciones son difícilmente reconocibles con el nuevo lenguaje, mientras que otras sufren una ligerísima variación, por ejemplo la función, con la que estamos tratando pasaría a ser:

$$f(x)=x*(100-2x)$$

Esto implica como consecuencia, que después de hacer la traducción del enunciado del problema al lenguaje algebraico, hay que hacer una segunda traducción de dicho lenguaje al lenguaje del programa que se va a usar.

El siguiente paso con la enseñanza tradicional, consistiría en reconocer dicha función como una parábola para poder realizar su representación gráfica, y realizar los pasos correspondientes a la dicha representación. Los ordenadores y calculadoras nos evitan este paso, ya que introduciendo directamente la expresión algebraica, podremos visualizar su gráfica. Es decir, todo el proceso de representación gráfica de una función se sustituye por el conocimiento de la tecla de la calculadora #, el menú del software correspondiente, o la orden adecuada para realizar dicha representación.

Un elemento nuevo respecto de la enseñanza tradicional, está relacionado con el “trozo” de gráfica que nos aparecerá en la pantalla (la ventana o window). En la enseñanza tradicional, la representación será única y vendrá determinada por ciertos valores de las variable independiente y la dependiente que utilizamos, porque poseen las claves para permitirnos representar gráficamente la función (cortes con los ejes, intervalos de crecimiento o decrecimiento, algunos valores significativos como que x sea igual a cero,...). Dicha representación será, por lo tanto, una representación global de la función. En cambio, utilizando estas nuevas herramientas tecnológicas, podremos variar el rango de la mencionada ventana para trasladarnos a lo largo de la función, obteniendo sucesivos encuadres a partir de los que podremos elegir el más adecuado. En realidad estaremos eligiendo un entorno de un punto y el correspondiente entorno de su imagen, o lo que es lo mismo, tendremos una gráfica en la que lo esencial es su carácter topológico. Además, utilizando el comando correspondiente al zoom podremos hacer el entorno cada vez más preciso, es decir, estaremos disminuyendo el ε correspondiente al radio del entorno con lo que el foco de la gráfica va centrándonos más y más en el punto que queremos estudiar. A la representación correspondiente a la gráfica de la función, estamos añadiendo un elemento más de lo habitual, el rango de valores de la variable dependiente y la variable independiente que se consideran pertinentes, o en los que se quieren hacer las observaciones oportunas. Este cambio respecto lo anterior, resulta por otro lado interesante, ya que el ejercicio de tener en cuenta dichos valores, hace que consideremos como una parte importante de la función, su dominio de definición, que normalmente omitimos y que por otra parte resulta algunas veces necesario en las aplicaciones, como en el caso de la altura que alcanza un proyectil que es lanzado desde un cañón. Este es por lo tanto un elemento nuevo en cuanto al sistema de representación gráfica de una función. Dicha ventana viene definida por medio de dos tripletas de números: una correspondiente a la variable independiente y otra a la variable dependiente de la siguiente forma: (valor mínimo de la variable, distancia entre las marcas correspondientes al eje de la variable, valor máximo de la variable). Por ejemplo, se podría dar la situación que aparece en la pantalla siguiente, en la que podemos observar que el eje OX varía desde -10 hasta 10 con marcas que van de 1 en 1 , y el eje OY varía igualmente desde -10 hasta 10 con marcas de 1 en 1 . Esta es la ventana estándar, pero podemos hacerla variar según la función que queramos representar:

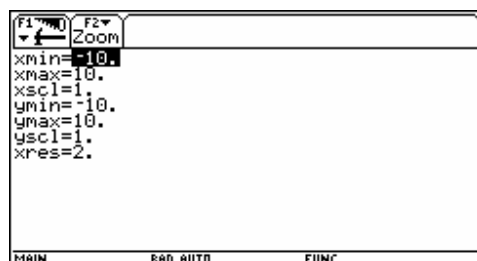


Fig. 5.12: Ventana estándar para la representación gráfica de funciones

La representación gráfica resultante para la función que nos ocupa es la siguiente:

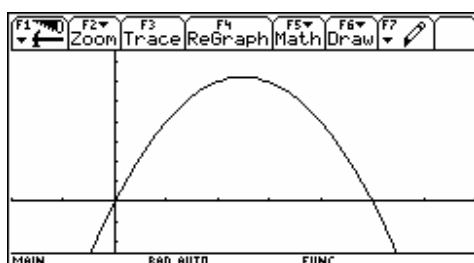
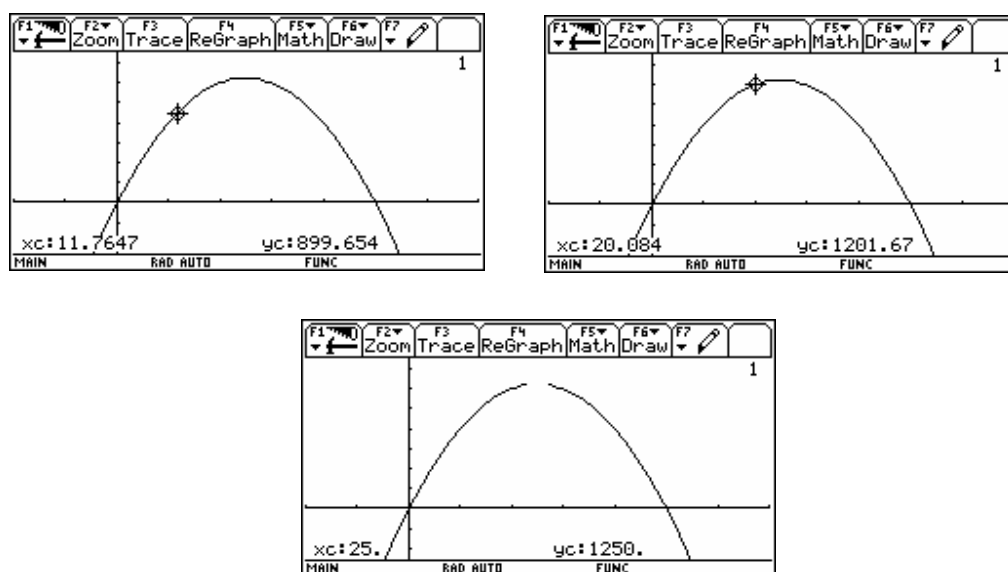


Figura 5.13: Gráfica de la función $f(x)=x(100-2x)$ utilizando como ventana para x $(-20, 10, 70)$, y para y $(-500, 200, 1500)$

Utilizando uno de los menús, que en el caso de la calculadora corresponde a la tecla $\square$, podemos activar el cursor para que se mueva sobre la curva que ha dibujado, de forma que para cada punto, nos dé sus coordenadas, y de esta forma podamos evaluar en qué momento se alcanza el máximo. En la siguiente sucesión de pantallas se puede comprobar cómo se van teniendo sucesivas aproximaciones al punto.



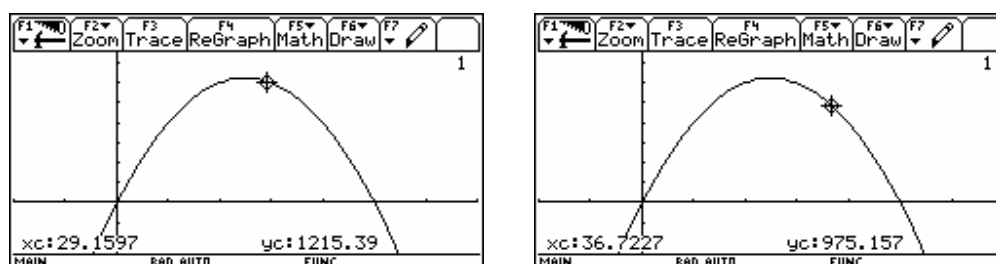


Fig. 5.14: Cálculo del máximo.

De esta forma, hemos calculado el punto máximo, para $x=25$ se obtiene un valor de $y=1250$.

Si nos restringimos a la utilización, de la calculadora (pero se habría realizado de igual forma si hubiéramos utilizado DERIVE o FUNCIONES) los elementos utilizados han sido:

- traducción de una expresión algebraica sobre el papel a una expresión algebraica sobre la máquina reconocible por ésta. (pantalla de expresiones algebraicas #)
- elección de la ventana adecuada para visualizar los puntos extremos de la función a partir de dos tripletas de números. (pantalla de ventana $\exists$)
- visualización de la gráfica de la función. (pantalla de representación gráfica %)
- selección de el menú que permite recorrer la función por medio del cursor (TRACE)

Pasamos de una expresión algebraica a la visualización de la gráfica de la función, y a la lectura de dicha gráfica por medio de las coordenadas de los puntos de la curva que vamos recorriendo, es decir, volvemos a la consideración algebraica de la curva como pares ordenados de valores. Finalmente, comparamos estos valores aritméticos para obtener el máximo o el mínimo.

5.2.3.- Lectura de la tabla de valores de la función.

Otra opción para calcular los puntos extremos, es utilizar la tabla de valores de la función. Para ello es necesario haber introducido la ecuación algebraica de la función que se va a considerar. Una vez llevado a cabo este primer paso, al igual que hemos visto cuando se representa gráficamente una función, cuando se utiliza la tabla es necesario proporcionar al programa ciertos valores, a partir de los cuáles va a generar dicha representación. Por ejemplo, en el caso de la calculadora gráfica tendremos que completar una pantalla como la siguiente:

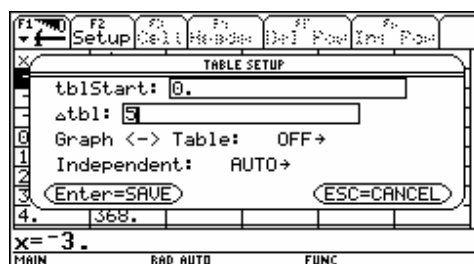


Fig. 5.15: Selección de parámetros para representar tabularmente una función

En dicha pantalla tendremos que rellenar aquellos elementos que nos piden en función de los datos que conocemos de la función, por ejemplo, en el problema que nos ocupa sabemos que los datos han de partir de 0, puesto que un lado de un rectángulo nunca puede tener una longitud que sea negativa. Por ello, el valor en el que se decide iniciar la tabla es 0, y a partir de él se pueden ir obteniendo los valores de y , según vayamos variando x , en este caso de 5 en 5. Este último incremento puede ser cualquier número positivo, incluso un número decimal, que será interesante cuando el punto que queremos calcular también lo sea. Las nuevas tecnologías, eliminan todos los cálculos rutinarios que tengamos que hacer para poder elaborar la tabla, lo que se trata es de poseer una adecuada visión del problema que se quiere resolver en cuanto a los datos que son válidos, y tener una idea de las magnitudes con las que se está trabajando para generar la tabla adecuada de una forma rápida, es decir, hay que cultivar la intuición acerca del comportamiento de las funciones y los valores que pueden tomar cada una de ellas. Una vez completada la pantalla anterior la calculadora nos genera la tabla siguiente según los valores que le hemos dado anteriormente:

x	y_1				
0.	0.				
5.	450.				
10.	800.				
15.	1050.				
20.	1200.				
25.	1250.				
30.	1200.				
35.	1050.				
$x=0.$					

Fig. 5.16: Tabla de valores de la función $y=x(100-2x)$

A partir de la lectura de la tabla anterior, se puede averiguar fácilmente cuál es el valor que corresponde al máximo de la función ($y=1250$). Se obtienen, igual que en el apartado anterior, los dos valores correspondientes a la variable independiente y a la dependiente, es decir, el valor máximo de la función y aquel valor para el que la función obtiene el máximo. En los problemas que aparecen en los libros de texto, y que hemos analizado en el capítulo anterior, hemos observado, que sólo se pide uno de los dos. En estos dos apartados, hemos desarrollado un proceso de cálculo de los puntos extremos

como un par ordenado en el que el valor de una variable esta asociado de forma exclusiva al valor de la otra.

En este proceso hemos partido de la expresión algebraica de la función, para generar una tabla adecuada, mediante la selección del punto de inicio de la tabla y los saltos entre sucesivos puntos. Nos hemos movido entre la pantalla de edición de funciones #, la de establecimiento de los valores de la tabla &, y la pantalla correspondiente a la tabla propiamente dicha $\exists$. En la traducción que se ha realizado interviene una expresión algebraica y la lectura de datos puramente aritméticos, correspondientes a las coordenadas de los puntos de la función.

Tanto este método, como el anterior de lectura de la gráfica, consideran la curva como un ábaco que permite calcular la ordenada de un punto haciendo variar la abscisa. Esta consideración hace que se considere la curva como una sucesión de puntos “unidos”.

5.3.- UTILIZACIÓN DE LOS COMANDOS DE LOS PROGRAMAS.

En algunos de los menús⁵ de los programas, se incluyen comandos relacionados con el cálculo de máximos, mínimos y puntos de inflexión. Una vez representada gráficamente la función, sólo se trata de activar dichos comandos, para que nos resuelvan el problema. En la situación que nos ocupa, si utilizamos la calculadora, activamos el menú correspondiente a la tecla $\square$ de la pantalla gráfica, para que se nos muestren todas las opciones disponibles:

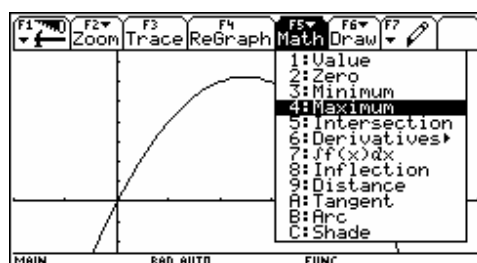


Fig. 5.17: Menú relativo al cálculo de los puntos críticos

En el cuadro desplegable observamos que disponemos, entre otros, de comandos relacionados con el cálculo de máximos, mínimos y puntos de inflexión. Como nos interesa el cálculo de un máximo, pulsando la tecla ψ , nos aparecerá una pregunta, mediante el cuál proporcionaremos a la calculadora los datos necesarios para poder calcular el punto en cuestión. Dicha pregunta permite establecer las cotas entre las que queremos calcular el

⁵ Lo hace todo la máquina en este caso, se podría utilizar como comprobación de los resultados obtenidos por medio de algún otro método.

máximo, es decir, lo que estamos calculando, son máximos relativos y el estudio que estamos realizando, es de tipo local:

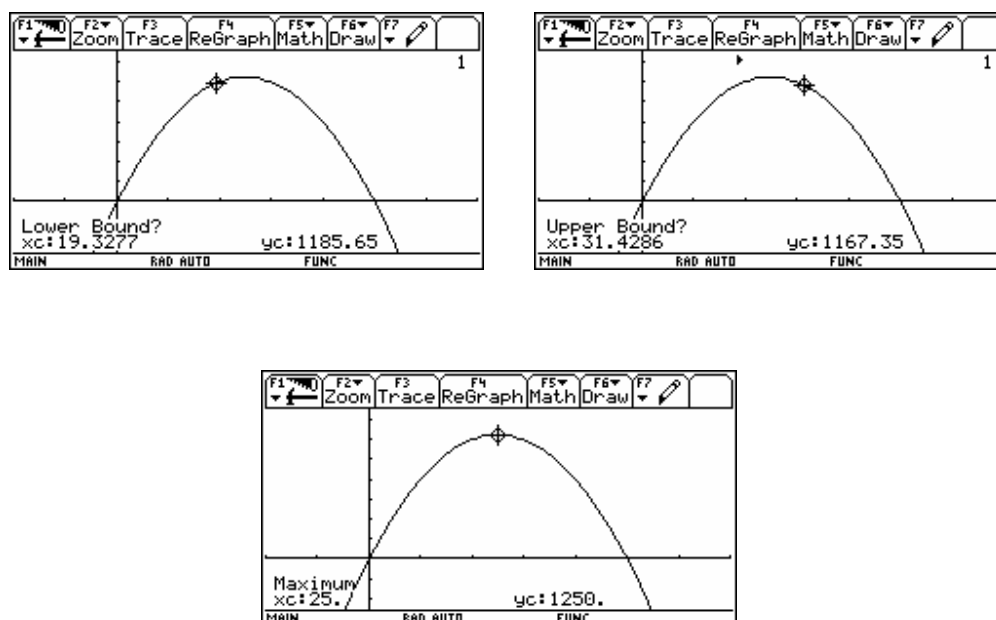


Fig. 5.18 Cálculo de un máximo

De forma similar, utilizando el programa FUNCIONES, y mediante un menú muy similar al que hemos visto utilizando la calculadora gráfica, dicho software nos proporciona los valores requeridos:

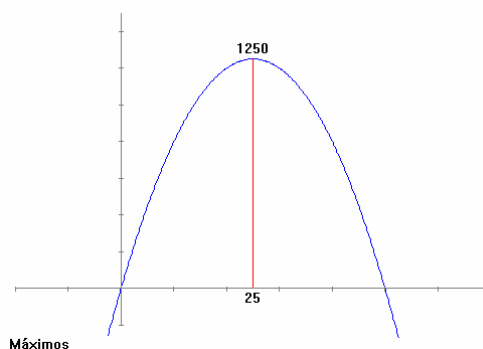


Fig. 5.19: Cálculo de un máximo usando el programa FUNCIONES

Vemos que, además de obtener las coordenadas del punto extremo, se señala dicho punto mediante una línea vertical, que asocia el valor correspondiente a la variable independiente y el de la dependiente, es decir, utiliza una gráfica de tipo ábaco en la que se relacionan valores numéricos, pero la visión que se tiene de la gráfica utilizando este último método, es más bien de tipo topológico, ya que en lugar de considerarla como una sucesión de puntos, se tiene en cuenta los valores que existen en el entorno de uno de ellos. El

proceso seguido no difiere en gran medida del que hemos denominado lectura de la gráfica, salvo por la utilización mucho más específica de los comandos que posee la calculadora o el programa informático. Las pantallas que se han utilizado son las mismas, pero no se ha hecho un estudio detallado de los valores que toma la función. Este tipo de situaciones se utilizan para identificar ciertos puntos, poder nombrarlos y asignarles unas determinadas cualidades en función de su posición en una gráfica.

5.4.- UTILIZACIÓN DE LAS HERRAMIENTAS PROPIAS DE ANÁLISIS.

El propio Cálculo Diferencial⁶, nos provee de dos formas para calcular estos puntos: i) Visualización de que la recta tangente es paralela al eje de abscisas, ii) o cálculo de la derivada de la función en un punto y comprobación de que si esa derivada es cero, estamos ante un punto crítico.

5.4.1.- Construcción de la recta tangente.

Una vez que hemos representado gráficamente la función, podemos comprobar en qué puntos la tangente es horizontal al eje de abscisas, pues entonces sabremos por los teoremas que hayamos podido estudiar, que tendremos un punto estacionario. Asociaremos estos puntos con una determinada posición de la recta tangente a la gráfica, es decir, con un ideograma, de forma que cuando estemos ante otra representación con estas mismas características, podremos realizar la trasferencia de conocimientos oportuna, y reconocer los puntos como de un cierto tipo. Comprobaremos además, que si el punto es un máximo, la gráfica quedará por **debajo** de la tangente, si es un mínimo quedará por **encima** y si es un punto de inflexión **atravesará** la curva. Asociamos los diferentes tipos de puntos críticos con determinadas **posiciones espaciales** en el plano cartesiano.

La calculadora gráfica TI-92, dispone en el menú correspondiente a la tecla $\square$, de un comando que permite dibujar la recta tangente en cualquier punto de la curva.

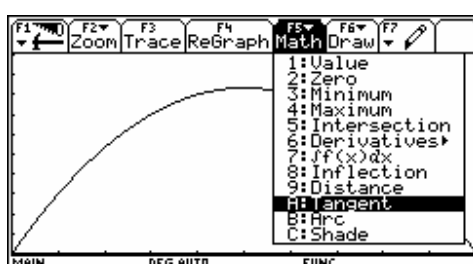


Fig. 5.20: Menú para la construcción de la recta tangente a una curva en un punto.

⁶ Algoritmos propios del análisis, reglas o procedimientos establecidos ex profeso para resolver estos problemas.

Además, en un punto cualquiera de la curva, se puede dibujar dicha recta y se nos proporcionará su ecuación, con lo que sabremos su pendiente:

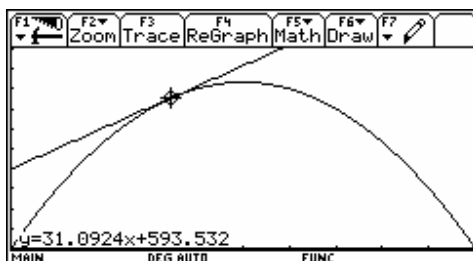


Fig. 5.21 Recta tangente a una curva en un punto.

Nuestro propósito será que dicha recta tangente, tenga pendiente cero, para lo que simplemente hay que buscar la posición, o el punto adecuado, que nos proporcione la solución:

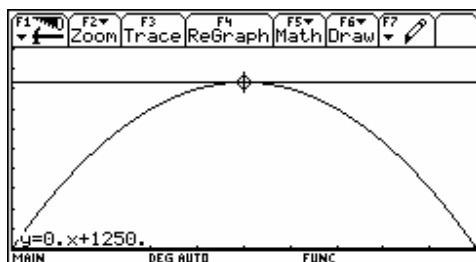


Fig. 5.22 Recta tangente a una curva en un punto máximo.

En el caso que nos ocupa, la función sólo tiene un punto extremo, se puede comprobar que la pendiente de la recta es 0, que la recta es horizontal, y que la curva queda por debajo de la recta tangente. Si tuviéramos una función con varios puntos extremos, se podría repetir el proceso para cada uno de estos posibles puntos, por ejemplo, la siguiente curva tiene un máximo para $x=-1$ y un mínimo para $x=2$:

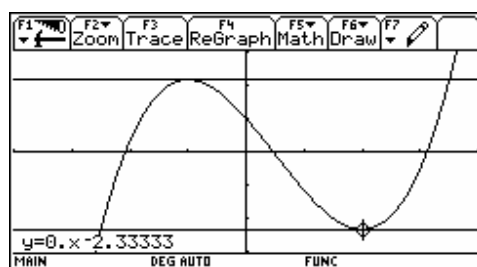


Fig. 5.23: Rectas tangentes en un punto máximo y uno mínimo.

En la gráfica que hemos realizado con la calculadora, podemos observar las rectas tangentes en cada uno de los dos puntos extremos que tiene, por ser la curva correspondiente a una función cúbica. De forma similar se puede hacer, si en lugar de tratar con puntos extremos, estamos intentando identificar un punto de inflexión:

En este caso, como ya hemos dicho, la gráfica de la curva se considera desde el punto de vista de un ideograma, es decir, lo importante es visualizar la posición de los puntos estacionarios con relación a otros elementos de la curva, por ejemplo la recta tangente, e identificar una posición de dicha recta con un cierto tipo de puntos, e incluso con el valor aritmético de la pendiente de la recta.

5.4.2.- Cálculo de la derivada de la función en un punto.

Otra de las numerosas posibilidades que nos ofrecen estos medios tecnológicos, se apoya en los conocimientos que ha desarrollado el propio Análisis Matemático. Hemos visto anteriormente, que los puntos estacionarios se caracterizan porque la primera derivada en dichos puntos se anula. Esta derivada podemos calcularla a partir de la gráfica, igual a como construimos la recta tangente en un punto. Desde la pantalla en la que está representada gráficamente la función, elegimos el menú de cálculos matemáticos pulsando la tecla $\square$, se nos desplegará un menú en el que una de las posibles opciones se refiere al cálculo de la derivada de la función en un punto.

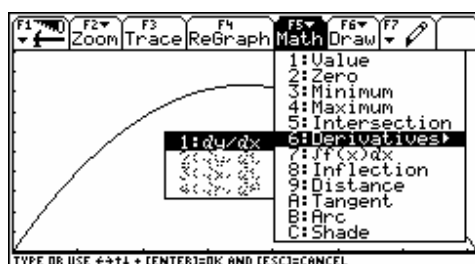


Fig. 5.24 Menú para el cálculo de la derivada de una función.

Seguidamente, debemos elegir convenientemente el punto en el que calcular la derivada por medio del cursor que se mueve a lo largo de la traza de la curva, de forma que tendremos una situación como la siguiente:

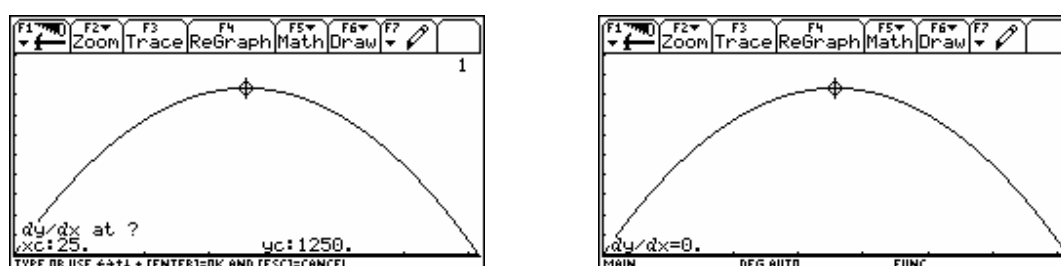


Fig. 5.25 Cálculo de la derivada de una función en un punto máximo.

Podemos calcular la derivada en varios puntos, e ir probando hasta obtener la solución adecuada, es decir, cuando nos dé la derivada igual a cero. De esta forma asociamos un cierto valor numérico, el 0 de la derivada, a una determinada posición de un punto sobre una curva.

Otra forma de realizar esto mismo, pero considerando el problema desde un punto de vista exclusivamente algebraico, consiste recurrir a la pantalla en la que se hacen este tipo de cálculos algebraicos, de forma que a partir de la expresión algebraica de la función, se va a obtener su derivada en un punto. En las pantallas que se incluyen a continuación, se puede comprobar el proceso por medio del cual hemos resuelto el problema. Primeramente hemos escrito la ecuación algebraica de la función, seguidamente hemos calculado su función derivada utilizando una tecla adecuada: 2=, y por último, utilizando el menú correspondiente a $\square$, que nos proporciona diversos comandos para realizar los tipos de cálculo que necesitamos, podemos igualar la función a cero y resolver la ecuación correspondiente:

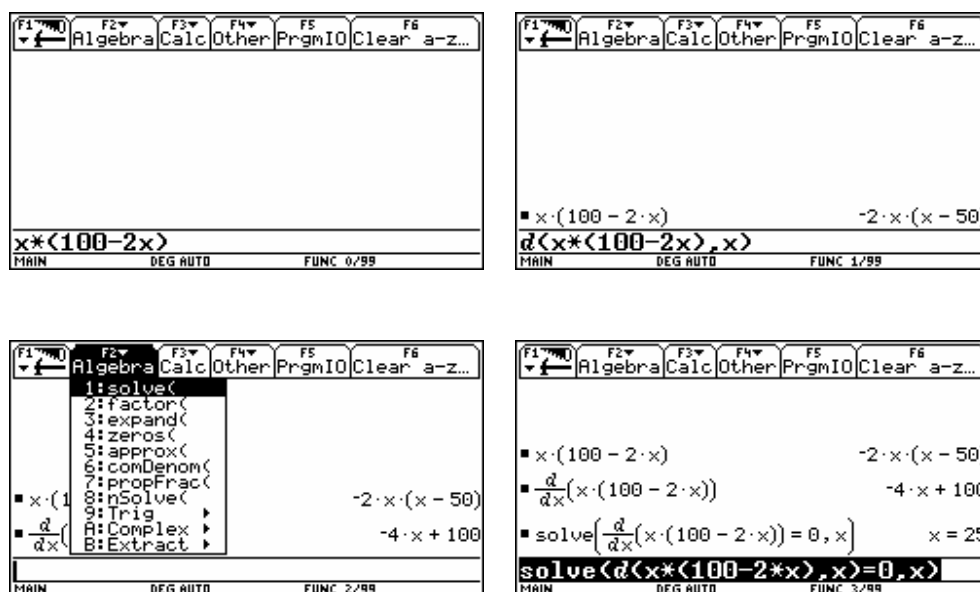


Fig. 5.25. Cálculo de la abscisa para la que la derivada de la función se anula.

Por último, otra forma de calcular ese valor de x , es utilizar otro comando que aparece en el mismo menú que hemos visto antes y que nos permite calcular los ceros de una expresión algebraica:

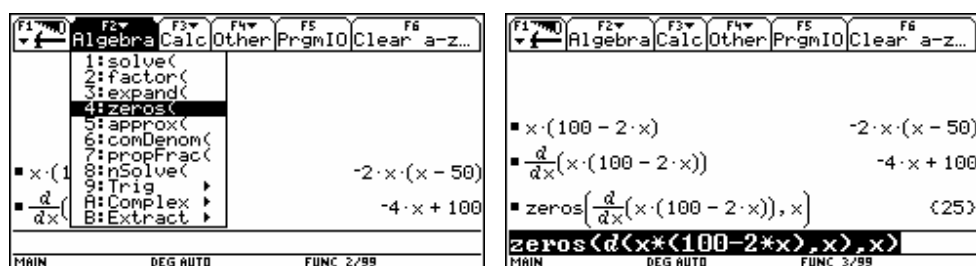


Fig. 5.26: Cálculo de los ceros de la función derivada.

La calculadora nos da el valor de x para el que se anula la primera derivada. Si queremos saber cuál es el valor máximo de la función, lo único que tendremos que hacer, como cuando se realizan los cálculos con lápiz y papel, es sustituir dicho valor de x en la función.

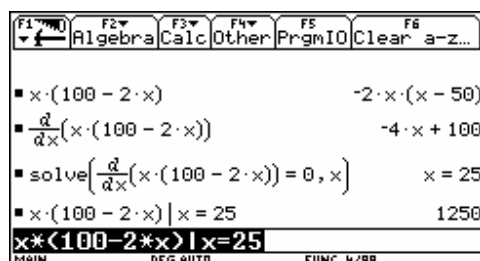


Fig. 5.27: Cálculo del máximo de una función

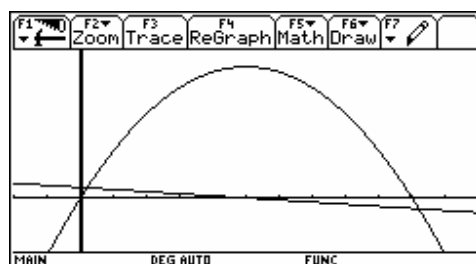
La raya vertical $\subseteq$ que aparece en la expresión que vemos en la pantalla se utiliza cuando se quiere sustituir un valor o una expresión en otra, en este caso, el valor $x=25$ y se escribe en la calculadora utilizando la combinación de teclas: 2 K. Vemos que la calculadora ya ha realizado la operación y nos ha dado el valor máximo que buscábamos.

Se ha trabajado exclusivamente en el plano algebraico, el problema se reduce a la resolución de una ecuación que la calculadora realiza de forma inmediata, o se puede realizar con lápiz y papel. Se ha pasado de la ecuación algebraica de una función, a la ecuación de su función derivada, la consideración de una ecuación, y finalmente la resolución de dicha ecuación. Únicamente se han realizado manipulaciones de tipo algebraico, es decir, nos hemos movido dentro de un único sistema de representación, utilizando sus reglas de transformación o de traducción entre unas expresiones y otras.

5.5.- COMPARACIÓN DE LA FUNCIÓN CON SU DERIVADA PRIMERA Y CON LA DERIVADA SEGUNDA.

Los ceros de la primera derivada⁷ corresponden a puntos críticos, y según sea el valor de la segunda derivada: cero, positivo o negativo, tendremos respectivamente un posible punto de inflexión, un mínimo o un máximo. Podemos representar gráficamente en la misma pantalla, tanto una función como su primera función derivada, de forma que los puntos estacionarios de la función, corresponden a los ceros de la función derivada. Esto no implica que dichos puntos sean extremos, como se puede comprobar claramente para algunas funciones, pero cuando lo son, si además en ese punto la función derivada es creciente, se tiene un mínimo, y si es decreciente, se tiene un máximo. La función con la que estamos trabajando desde el principio de este capítulo, es una función cuya gráfica resulta ser una parábola, su función derivada tendrá una gráfica que corresponderá a la de una línea recta con una cierta pendiente, y cuyo corte con el eje de las x , corresponderá al único punto estacionario que posee la función.

⁷ Propiedades que permiten relacionar una función con su función derivada.

Fig 5.28 Gráfica de la función $y=x*(100-2x)$ y de su primera derivada

Podemos observar en la gráfica anterior, que la función derivada es estrictamente decreciente, lo que asegura no sólo que el cero corresponde a un punto extremo, sino que además ese punto es un máximo.

En este caso también, como en el caso anterior, se está trabajando con un único sistema de representación, el de las gráficas funcionales, de forma que lo que interesa es comparar las características de la gráfica de una función, y la gráfica de su función derivada. La lectura de ambas gráficas, lo que representan, y las relaciones que podamos establecer entre ambas, son las capacidades necesarias para resolver la situación. Estas gráficas actúan como ideogramas en los que las características que tienen ambas curvas están determinadas una por la otra. Este tipo de actividades hace que se tenga que poner énfasis en el estudio de las características semánticas de los gráficos funcionales. Para que se puedan relacionar las características que poseen la curva de una función, y la curva de su función derivada, lo que permitirá establecer relaciones del tipo: crecimiento/decrecimiento, valores positivos/negativos, máximos/mínimos- cortes con el eje OX,... Por ello, en la enseñanza actual se proponen a los alumnos actividades del tipo:

- A partir de la gráfica de una función, dibujar la gráfica de la función derivada.
- A partir de la gráfica de la función derivada, dibujar la gráfica de la función inicial (una primitiva)
- Comparación de parejas de gráficos de funciones y funciones derivadas.
- El inicio de la actividad puede ser, en lugar de un gráfico, una tabla de una de las dos funciones o bien una descripción de alguna de ellas.

Los objetivos que se pueden cubrir mediante este tipo de traducciones son: adquirir habilidad en la lectura visual directa de las características más notables de una gráfica, darse cuenta del hecho de que una función tenga un punto estacionario no es una condición suficiente para que tenga un extremo relativo,... Se puede trabajar de esta forma directamente con las gráficas de las funciones, evitando el paso formal al límite, que según se ha constatado en investigaciones anteriores, resulta excesivamente complicado para los alumnos de enseñanza media. De una forma más precisa, en la tesis de Font (1999) se establece, por medio de un cuadro, todas las posibles relaciones que se pueden establecer

entre una función y su función derivada, como ampliación de una tabla original ya citada anteriormente en esta tesis, de Janvier. Para cada una de las posibles traducciones incluidas en la tabla, se trataría de diseñar actividades ad hoc, de forma que se pudieran establecer el mayor número de conexiones posibles. En esta tabla se distinguen mediante tres colores distintos tres tipos de subprocesos asociados a los tipos de traducciones posibles entre una función y su función derivada:

- Subproceso 1: representación de $f(x)$ $\longrightarrow$ otra representación de $f(x)$.
- Subproceso 2: representación de $f(x)$ $\longrightarrow$ representación de $f'(x)$.
- Subproceso 3: representación de $f'(x)$ $\longrightarrow$ representación de $f(x)$.

En la tabla se representan los distintos tipos de actividades que se pueden plantear y se clasifican según los tres subprocesos descritos anteriormente.

	Descripción verbal de $f(x)$	Descripción verbal de $f'(x)$	Tabla de $f(x)$	Tabla de $f'(x)$	Gráfica de $f(x)$	Gráfica de $f'(x)$	Expresión simbólica de $f(x)$	Expresión simbólica de $f'(x)$
Descripción verbal de $f(x)$								
Descripción verbal de $f'(x)$								
Tabla de $f(x)$								
Tabla de $f'(x)$								
Gráfica de $f(x)$								
Gráfica de $f'(x)$								
Expresión simbólica de $f(x)$								
Expresión simbólica de $f'(x)$								

Tabla de traducciones entre formas de representación sugeridas por tres subprocesos: representación de $f(x)$ $\longrightarrow$ otra representación de $f(x)$, representación de $f(x)$ $\longrightarrow$ representación de $f'(x)$, representación de $f'(x)$ $\longrightarrow$ representación de $f(x)$ Font, V (1999) p. 147

Cada uno de los tres subprocesos está representado por medio de diferentes rellenos de casillas: el subproceso 1 está relacionado con las casillas azules, el subproceso 2 por las casillas blancas, el 3 con las verdes y, por último, las casillas rosas representan las posibles traducciones entre la función derivada con otra representación de la misma función derivada.

De forma similar, se puede hacer si queremos relacionar cualquier par de funciones, en esta tabla hemos visto la relación de una función con su derivada, pero en otros casos, se puede relacionar con la derivada segunda, la derivada primera con la segunda, o dos representaciones diferentes de una misma función en uno alguno de los cuatro sistemas de representación (verbal, gráfico, tabular o simbólico). Por ejemplo, una de las actividades más típicas suele ser:

Compara las gráficas de las dos funciones siguientes y razona detalladamente si una de ellas es la función derivada de la otra⁸.

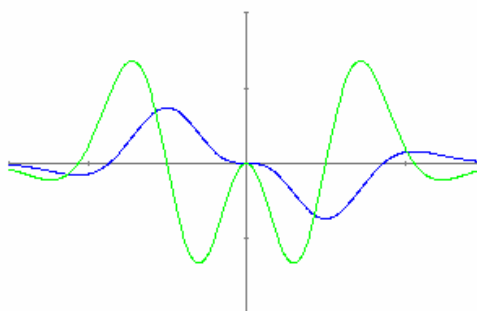


Fig. 5.29: Gráficas de una función y su función derivada.

E incluso en algunas ocasiones, resulta conveniente el recurso a la gráfica de la segunda derivada, como indica Cantoral (2001), que diseña cuatro actividades, haciendo preguntas a los alumnos en relación con sucesivas derivadas de una misma función, para mostrar cómo las respuestas de los alumnos provienen básicamente de las explicaciones que los maestros usan, apoyándose en sus textos, más que de sus propias estrategias para la resolución de problemas. Las preguntas que se hacen en relación con la gráfica de la función $f(x)$ son: ¿Dónde es positiva $f(x)$?, ¿Dónde es positiva $f'(x)$? ¿Dónde es positiva $f''(x)$? Y por último ¿Dónde es positiva $f'''(x)$?

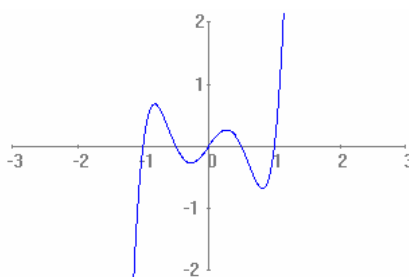


Fig 5.30⁹. Gráfica de una función $y=f(x)$

⁸ Actividad seleccionada del proyecto: Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1997) *Diseño, experimentación y evaluación de un proyecto de Enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato* financiado por la Junta de Castilla y León.

A partir de la gráfica de una función, hay que razonar acerca de los valores que posee esa función, su primer derivada, su segunda derivada y, por último, la tercera derivada. Como está última no se compara en los libros de texto, ni se hace referencia alguna a ella en las explicaciones del profesor, los alumnos no son capaces de movilizar los conocimientos necesarios para resolver la pregunta en cuestión.

5.6.- CONCLUSIONES.

Al igual que hicimos con los libros históricos, para establecer las conclusiones relativas a las nuevas tecnologías, realizamos un análisis en tres vertientes: un análisis socio-cultural, un análisis epistemológico y un análisis didáctico, manteniendo los mismos campos que en aquel caso.

Análisis socio-cultural:

- CIA1: Tanto el software como las calculadoras gráficas han sido desarrolladas a partir de los años 90, con lo que podemos considerar que es un material muy novedoso y todavía con una implantación muy reducida en el mundo escolar, siendo la utilización más bien de tipo puntual, tanto en el tiempo que se le dedica, como en las aulas en que se usa. Por ello nos ha resultado muy difícil su análisis, puesto que es escaso el material que se ha diseñado para la enseñanza de los conceptos del Cálculo Diferencial mediante el uso de las nuevas tecnologías.
- CIA6: En los programas oficiales actuales se aconseja el uso de las calculadoras, con lo que tanto éstas como las nuevas tecnologías se adaptan a las orientaciones establecidas por la L.O.G.S.E. De hecho en otros países son de uso obligatorio, incluso en las pruebas selectivas. Es de esperar que la implantación de estos medios se vaya haciendo cada vez más amplia, se vaya formando al profesorado en su uso, se vayan publicando materiales en relación con su utilización y se vayan desarrollando investigaciones relativas a las implicaciones que conlleva su incorporación plena.
- CEM1: La estructura del software preparado para la enseñanza de los conceptos del Cálculo Diferencial, está organizada en pantallas diferenciadas según cada uno de los sistemas simbólicos de representación, de forma que se puede secuenciar e incluso simultanear el uso de cada uno de ellos, con lo que se puede crear una red conceptual adecuada en cuanto a la adquisición no sólo de los conceptos relativos a los puntos críticos, sino en general, en cuanto a los conceptos del Análisis Matemático. La propia construcción de las gráficas y tablas sugiere una visión dinámica del concepto de función ligado a la idea de variación, lo que está más en

⁹ Cantoral Uriza, R. (2001) Sobre la construcción social del conocimiento matemático avanzado. En J.A. Domínguez y M. Sierra *Tendencias actuales de las matemáticas: Su historia y su enseñanza..* Salamanca: Kadmos, pp.97-110.

consonancia con el origen, construcción, desarrollo y aplicación de esta rama de las matemáticas.

- d: Aunque las descripciones no son parte integral de los sistemas de representación presentes en el software, si son un punto de partida, y de llegada; puesto que ante cualquier actividad es necesaria una interpretación de los resultados obtenidos por la máquina utilizada.

Análisis epistemológico.

- CIA4: Las innovaciones que introducen los medios tecnológicos son numerosas, desde el trabajo directo con las gráficas de las funciones, la categoría concedida a las tablas funcionales, que pasan a ser consideradas al mismo nivel que cualquier otro sistema de representación; la posibilidad de traducción entre diferentes sistemas de representación en ambos sentidos y en pantallas independientes, la importancia que adquiere el dominio de definición de la función, la posibilidad de concebir las gráficas de las funciones desde un punto de vista geométrico-dinámico (al igual que hacían los matemáticos clásicos) animando las construcciones realizadas, la posibilidad de obviar la expresión simbólica de la función, la consideración de la función desde un punto de vista local enfatizado por la herramienta que permite hacer zoom en la gráfica,...
- e: El uso de las nuevas tecnologías, permite el estudio de funciones que hasta ahora era impensable, por la dificultad asociada a su representación gráfica, de forma que se pueden estudiar funciones sencillas como las que aparecen normalmente en los libros de texto, pero también se pueden considerar funciones definidas por una serie de potencias, funciones trigonométricas más complicadas, funciones definidas en coordenadas tanto cartesianas, como polares o paramétricas, con lo que el abanico de funciones realmente amplio. Incluso, se puede realizar el análisis de una función obtenida directamente a partir de un experimento o una situación real. Esto puede hacer que cambie considerablemente tanto las clasificaciones que se suelen considerar en relación con las funciones como el hecho de que sean objetos exclusivamente matemáticos, sin ninguna relación con una situación física constatable. Además las funciones dejan de ser consideradas exclusivamente bajo su forma más simbólica para ser manejadas a partir tanto de su gráfica, como desde su expresión tabular.

Análisis didáctico.

- CIA3: El objetivo de este material es fundamentalmente la visualización, la concepción global de los procesos implicados en el aprendizaje del Análisis Matemático, ya que todos los procesos de tipo aritmético o algebraico son realizados directamente por la calculadora y el alumno puede centrar su atención en los procesos propios del Cálculo Diferencial, y el análisis local de las funciones, que es la verdadera esencia del Análisis Matemático. Los procesos de visualización y de representación pasan a tener un papel esencial para la adquisición de los conceptos.

- CEM2: La secuenciación de los contenidos es muy flexible, de hecho hemos visto que se puede utilizar la noción de derivada sin hacer mención al límite. El propio dinamismo de estos medios tecnológicos permite la relación entre diferentes conceptos, así a partir de la gráfica de una función se puede hacer el estudio de su continuidad, su derivabilidad, el cálculo de los puntos extremos, el cálculo del área entre ciertos puntos, la construcción de la recta tangente en un punto, ...
- CEM4: Algunos de los símbolos que se utilizan en el software descrito varía ligeramente respecto del habitual, lo que puede ser una dificultad añadida a la hora de transformar expresiones de “lápiz y papel” a expresiones “de tecla”. El resto de las representaciones no tiene ninguna diferencia con las utilizadas en los libros de texto. Se puede obtener fácilmente a partir de una función su función derivada, lo que resulta sorprendente dado el carácter analítico de estos medios tecnológicos, también se puede llevar a cabo un trabajo con familias de funciones.
- g: La concepción de la gráfica de una función varía según su forma de utilización, de forma que puede percibirse desde puntos de vista diferentes: como pares ordenados de valores (punto de vista aritmético), como una traza formada por puntos “unidos” (visión gráfica-dinámica), como lugar geométrico (visión geométrico-dinámica). Asociadas a estas concepciones, hemos utilizado en estos medios tecnológicos las gráficas tanto como ábacos, como mensajes topológicos o ideogramas, con lo que podemos concluir que mediante el uso de estos medios, se puede obtener una visión muy completa de la gráfica de una función. Se puede comparar con la gráfica de su función derivada o de otra función, para establecer las relaciones adecuadas entre ellas.
- t: En cuanto a las tablas, como ya se ha dicho, adquieren un papel similar a cualquier otro tipo de representación de tal forma que, mediante sucesivos afinamientos, se puede llegar a obtener una idea bastante exacta del comportamiento de una función en el entorno de un punto, y resulta un método muy sencillo y exacto para el cálculo de los puntos críticos. Tanto su construcción como su interpretación se convierte en elementos de la enseñanza muy adecuados para la etapa secundaria.

En resumen, las aportaciones que ofrecen las nuevas tecnologías, en cuanto a la enseñanza de los conceptos relativos a los puntos críticos, son muy numerosas, desde la recuperación del concepto de función como objeto geométrico, su manejo como objeto algebraico, o su estudio como objeto aritmético. Se ofrece una visión fundamentalmente dinámica de los conceptos del Análisis Matemático y se permite una relación directa con la experimentación.

